OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1902. N° 5

SUR LES CAUSTIQUES PLANES

PAR

C. JUEL

1. Une caustique est une surface que nous rencontrons dans la nature toutes les fois que des rayons émanés d'un point fixe sont réfléchis ou réfractés par une autre surface. De tels rayons lumineux sont tangents à une certaine surface qu'on appelle „catacaustique" quand il s'agit de rayons réfléchis, et „diacaustique" quand les rayons sont réfractés. Dans ce qui suit, nous nous bornerons à considérer le cas, purement géométrique, où des rayons lumineux émanés d'un point sont réfractés (ou réfléchis) par une courbe plane dont le plan contient ce point. Nous obtenons alors la détermination d'une surface caustique proprement dite en supposant que la surface réfringente (ou réfléchissante) soit une surface de révolution sur l'axe de laquelle se trouve le point lumineux, et encore, au cas qu'il s'agisse seulement de rayons réfléchis, en admettant que la surface réfléchissante soit de forme cylindrique, tandis que la situation du point lumineux est quelconque.

2. Dans le cas de rayons lumineux issus d'un point O et réfléchis par une courbe γ, on sait que les rayons réfléchis seront des normales à la courbe β trouvée en multipliant par 2 la podaire de γ par rapport à O, O étant le pôle. Selon Huyghens, la courbe β sera une courbe des ondes des rayons réfléchis; nous pourrions l'appeler la courbe principale des ondes.

Soit par exemple γ un cercle; la courbe principale des ondes sera alors une conchoïde de cercle, laquelle se réduira en une épicycloïde de cercle ordinaire dans les deux cas suivants, à savoir: 1° quand le point lumineux est situé sur le cercle réfléchissant même, 2° quand il est situé à l'infini. Dans le premier cas, la courbe des ondes sera un limaçon de Pascal; dans le second cas, elle sera une épicycloïde à deux points de rebroussement; et dans les deux cas, la caustique sera semblable à la courbe des ondes.

Nous ferons remarquer que dans les deux cas en question on pourra aisément indiquer quelle sera la caustique correspondant à une réflexion répétée des rayons. (Résultats connus.)

Soit en effet O situé sur le cercle et soit AB une corde du cercle représentant le rayon n fois réfléchi, on déduit alors immédiatement de la loi de la réflexion que les deux points A et B parcourront en un même temps, et dans le même sens, des arcs de cercle qui seront entre eux comme n à $n+1$. D'où il est facile de tirer la conclusion suivante:

La caustique correspondant à une réflexion n fois répétée dans un miroir cylindrique de rayon a, sera, au cas que le point lumineux se trouve sur le cercle réfléchissant même, une épicycloïde ordinaire où le rayon du cercle fixe est de $\frac{a}{n+1}$, et celui du cercle mobile de $\frac{na}{n+1}$.

Et de manière tout à fait analogue on aura:

La caustique correspondant à une réflexion n fois répétée dans un miroir cylindrique de rayon a, sera, dans le cas de rayons incidents parallèles, une épicycloïde ordinaire où le rayon du cercle fixe est de $\frac{2a}{n+1}$, et celui du cercle mobile de $\frac{2n-1}{2n+1}a$.

3. Pour obtenir la construction du point où le rayon (une fois réfléchi) s soit tangent à son enveloppe, on pourra se figurer

la courbe réfléchissante remplacée par une ellipse ayant un contact de second ordre avec γ, et dont un foyer coïncide avec le point lumineux O. La caustique se trouvera alors réduite à F, l'autre foyer de l'ellipse. Ce point F, qui est situé sur le rayon réfléchi, sera le point de contact demandé. A l'aide d'une construction connue du centre de courbure de l'ellipse[1] on arrive à déterminer F (V. la fig. 1.) en menant $CC_1 \perp OM$, $C_1C_2 \perp MC$ et enfin OC_2 qui rencontre en F le rayon réfléchi. Le cas de rayons incidents parallèles rentre dans celui qui va être traité.

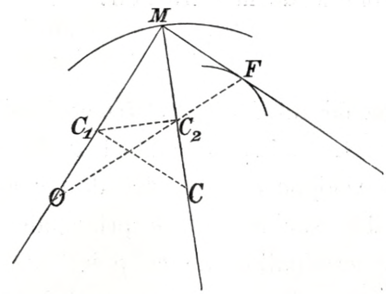

Fig. 1.

4. Nous allons maintenant considérer la caustique correspondant à des rayons réfractés issus d'un point O.

Décrivons autour de chaque point M de la courbe réfringente γ un cercle de rayon $\frac{1}{n}OM$, n étant l'indice de réfraction, l'enveloppe β d'un tel cercle sera alors une développante de la caustique. Le point où l'un des cercles que nous venons de construire est tangent à son enveloppe sera le point de contact de ce cercle et d'une tangente commune à deux cercles consécutifs. Une telle tangente commune doit passer par un point de similitude, extérieur, des cercles: T. Il est facile de voir que la droite OT sera la sous-tangente polaire, O étant le pôle (V. la fig. 2). En menant donc par T une droite tangente en R au cercle en question, de centre M, on n'aura qu'à joindre les points M et R pour obtenir le rayon réfracté

[1] Le rayon de courbure de l'elliqse, ρ, se trouve déterminé par la relation $\rho = \frac{N}{\cos^2 v}$ où N désigne la longueur de la normale comprise entre la courbe et l'axe focal, tandis que v représente l'angle que fait avec la normale le rayon focal mené par le point de la courbe.

MR. Veut-on un rayon réfracté tel qu'on en trouve dans la nature, il faut mener la tangente de manière à ce que MR et MO soient situées du même côté de la normale MC. Nous appellerons courbe principale des ondes la courbe décrite par R.

De la construction précédente on pourra déduire la loi connue de la réfraction:

$$\frac{\sin i}{\sin b} = n$$

en faisant $i = \angle CMO$ et $b = \angle CMR$.

Le point de contact F du rayon réfracté MR et de son enveloppe est le centre de courbure correspondant au point R situé sur la courbe principale des ondes. Pour obtenir la détermination de ce point nous allons le construire comme centre d'un cercle tangent à trois cercles consécutifs. A cet effet nous aurons recours à l'une des constructions qui servent à déterminer un cercle tangent à trois cercles donnés, et il y aura avantage à employer la solution fournie par Gaultier. Selon cette dernière le centre du cercle à construire doit être situé sur une droite menée par le centre radical des cercles donnés, perpendiculairement à un de leurs axes de similitude. Dans le cas qui nous occupe, il faudra choisir un axe de similitude extérieur, c'est-à-dire une ligne t passant par deux positions consécutives du point T (V. la fig. 2). Mais les points T ne dépendant pas de l'indice de réfraction n nous pouvons prendre, dans notre détermination de t, $n = -1$. La tangente t de la courbe décrite par T sera donc perpendiculaire à la ligne OC_2 de la fig. 1.

Pour trouver ensuite le centre radical nous ferons observer que l'axe radical de deux cercles consécutifs est une droite RS, parallèle à la normale MC de la courbe réfringente.

Le centre radical qui est le point de rencontre de deux axes radicaux concécutifs sera donc situé au point de contact de RS et de son enveloppe. Or il peut être démontré que cette derniere courbe et la développée de la courbe réfringente sont semblables et homothétiques par rapport au point O. On a en effet, l'axe radical RS coupant OM en S, et MT en Q,

$$MS : MO = MQ : \frac{MO^2}{MT} = \frac{MR^2}{MT} : \frac{MO^2}{MT} = MR^2 : MO^2 = 1 : n^2,$$

donc

$$\frac{OS}{OM} = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

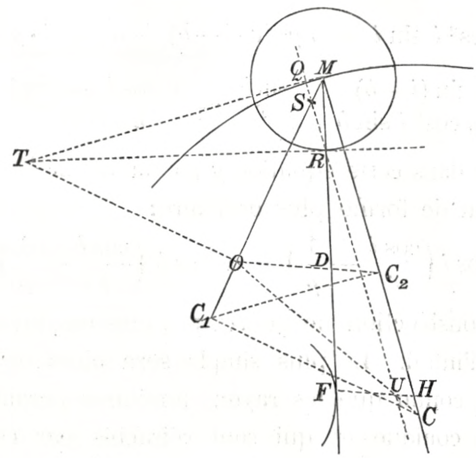

Fig. 2.

Le point de contact U de RS et de son enveloppe sera donc situé sur la droite qui joint le point O et le centre de courbure C de la courbe réfringente. Une droite menée ensuite par U, parallèlement à OC_2, coupera le rayon réfracté au point F où il est tangent à la caustique.

De ces constructions on peut déduire la relation entre $MO = r$ et $MF = f$.

Supposons que FU coupe MC en H et que MF coupe OC_2 en D et prenons $MD = g$, nous aurons alors:

$$\frac{CH}{CC_2} = \frac{CU}{CO} = \frac{MS}{MO} = \frac{1}{n^2},$$

$$CH = \frac{1}{n^2} CC_2 = \frac{1}{n^2} \rho \sin^2 i = \rho \sin^2 b.$$

$$MH = \rho - CH = \rho \cos^2 b.*$$

De plus

$$\frac{MF}{MD} = \frac{MH}{MC_2} = \frac{\cos^2 b}{\cos^2 i}$$

donc

$$MF = f = g\frac{\cos^2 b}{\cos^2 i}. \tag{1}$$

Et comme

$$\triangle\, OMC_2 = OMD + DMC_2,$$

il vient

$$r\rho \cos^2 i \,\sin i = rg \sin(i - b) + \rho \cos^2 i \cdot g \sin b \tag{2}$$

ou

$$\frac{1}{g} = \frac{\sin(i-b)}{\rho \cos^2 i \sin b} + \frac{\sin b}{r \sin i} = \frac{n \cos b - \cos i}{n\rho \cos^2 i} + \frac{1}{nr}.$$

Remplaçons dans cette équation g par la valeur $\frac{f \cos^2 i}{\cos^2 b}$, il vient une équation de forme plus ordinaire:

$$\cos i\left(\frac{\cos i}{r} - \frac{1}{\rho}\right) = n \cos b\left(\frac{\cos b}{f} - \frac{1}{\rho}\right).$$

5. La construction ne pourra pas être employée lorsque O s'éloigne à l'infini. Le plus simple sera alors de profiter de ce fait bien connu que les rayons lumineux parallèles à l'axe focal d'une conique et qui sont réfractés par cette courbe, viendront, après leur réfraction, passer par l'un de ses foyer pourvu que l'excentricité de la courbe soit égale à la valeur réciproque de l'indice de réfraction. En remplaçant donc la courbe donnée par une conique qui possède en M un contact de second ordre avec la courbe et dont l'axe focal soit parallèle aux rayons incidents, on obtiént la construction suivante: Soit M le point de rencontre du rayon incident s et de la courbe réfringente, et soit MF le rayon réfracté. Soit encore, en nous servant des dénominations ci-dessus employées, C_1 la projection du centre de courbure C sur MF, et C_2 la projection de C_1 sur MC; une droite C_2F menée parallèlement à s viendra couper le rayon réfracté au point F où il est tangent à son enveloppe.

* De cette expression, qui est analogue à l'expression de OC_2, découle une autre construction de la ligne UF.

6. Nous sommes maintenant à même de démontrer le théorème suivant énonçant qu'il y a réciprocité entre la courbe réfringente et la courbe principale des ondes, abstraction faite d'une transformation de similitude, et en changeant le signe de l'indice de réfraction (V. la fig. 3 où les dénominations sont essentiellement les mêmes que dans la fig. 2).

Menons la droite OR et marquons par i_1 l'angle des droites RO et RM, par b_1 l'angle des droites RS et RM. Décrivons ensuite sur MT comme diamètre un cercle, qui passera par les deux points de contact R et R_1 de tangentes menées par T à l'onde élémentaire, de centre M, dont il a déjà été question. Nous aurons alors numériquement:

$$\frac{\sin i_1}{\sin b_1} = \frac{OM}{MR_1} = \frac{OM}{MR} = n.$$

Seulement, comme i_1 et b_1 sont situés de côtés opposés de la normale RM à la courbe des ondes précédente (R), dans le cas où i et b se trouvent du même côté de la normale MC à la courbe réfringente précédente, il faut écrire, en tenant compte des signes,

$$\frac{\sin i_1}{\sin b_1} = -n.$$

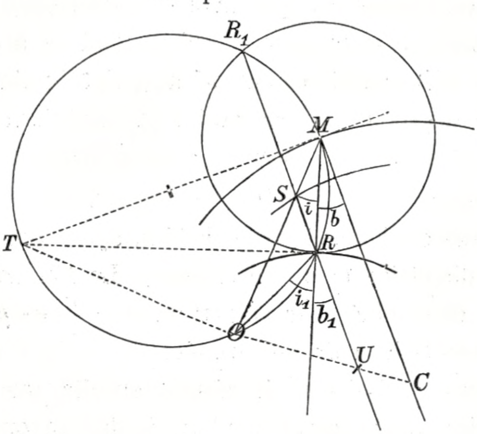

Fig. 3.

Donc, si nous avons des rayons lumineux issus de O et réfractés dans la courbe principale des ondes ci-dessus mentionnée (R), l'indice de réfraction étant $-n$, la caustique sera l'enveloppe de RS; mais d'après ce qui précède cette enveloppe sera semblable à la développée de la courbe donnée, dans le rapport de $\frac{n^2-1}{n^2}$, O étant le centre de similitude, car nous avons $\frac{OS}{OM} = \frac{n^2-1}{n^2}$. On pourra même montrer que la courbe décrite par les points S sera justement une courbe principale des ondes dans le cas de cette nouvelle réfraction. On a en effet

$$\angle R_1RM = MOR,$$

d'où

$$\triangle MRS \sim MOR,$$

donc

$$\frac{RS}{OR} = \frac{MR}{MO} = \frac{1}{n}, \quad \text{ou} \quad RS = \frac{1}{n} \cdot OR.$$

Grâce à cette réciprocité il sera possible de déduire de nouvelles diacaustiques de celles qu'on connaît déjà. Nous nous bornerons ici à tirer du théorème précédent la détermination des deux caustiques qui sont les plus utiles dans la pratique.

Soit d'abord la courbe réfringente une ligne droite. Nous commencerons dans ce cas par déterminer la courbe réfringente en supposant que la courbe principale des ondes est une droite. Soit la distance d'un point M à cette droite MR, et soit MO la distance de M au point lumineux, le lieu géométrique des points satisfaisant à la condition:

$$\frac{MR}{MO} = \frac{1}{n}$$

sera alors une conique, d'excentricité n, ayant pour foyer O et pour ligne directrice la droite donnée. La longueur de l'axe focal i sera déterminée par l'équation $ae - \frac{a}{e} = g$, où g est la distance de O à la droite donnée.

Du théorème ci-dessus il résulte ensuite que la courbe principale des ondes correspondant à des rayons lumineux émanés de O et réfractés en la droite précédente sera encore une conique dont le foyer sera situé en O et dont l'axe focal aura une longueur $\frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{ng}{n^2-1} = \frac{g}{n}$.

Considérons maintenant le cas où la courbe principale des ondes est un cercle de centre C, tandis que les rayons lumineux partent d'un point O_1. Soit R le point d'intersection d'une ligne MC et de la circonférence, M sera un point de la courbe réfringente, si nous avons $MR = \frac{1}{n} MO_1$, c'est-à-dire si

$$n \cdot CM - O_1 M = nb,$$

en prenant le rayon du cercle égal à b.

Telle étant l'équation d'un ovale de Descartes aux coordonnées bipolaires, il s'ensuit réciproquement que la courbe principale des ondes correspondant à des rayons émanées de O et réfractés par cette même circonférence sera encore un ovale de Descartes. L'équation d'un tel ovale s'écrira

$$nr_2 - r_1 = \frac{n^2-1}{n} b,$$

où r_1 représente la distance d'un point de la courbe M_1 à O_1, et r_2 la distance de M_2 au point O_2 de la droite $O_1 C$ située à une distance de O égale à $\frac{n^2-1}{n^2} a$, si nous posons $O_1 C = a$.

7. Avant de terminer cette étude, nous ferons observer qu'il y a encore une autre manière de dériver des caustiques nouvelles de celles qu'on connaît déjà.

Supposons que nous ayons deux courbes inverses coupant en deux points correspondants M et M_1 une droite menée par un point fixe O de sorte que

$$rr_1 = k^2$$

où

$$r = OM, \text{ et } r_1 = OM_1.$$

Les deux cercles de centres M et M_1 et de rayons respectifs $\rho = nr$ et $\rho_1 = nr_1$ auront donc pour enveloppe une courbe composée des deux courbes principales des ondes correspondant à des rayons émanés de O, l'indice de réfraction étant $\pm n$. Suivant la construction du § 4 on mène par les points T et T_1 y indiqués les tangentes TR et TR_1 aux cercles en question, après quoi on aura le rayon réfracté représenté par MR et M_1R_1. En menant maintenant les tangentes de manière à faire correspondre l'un des points de contact à l'indice de réfraction n, l'autre à l'indice de réfraction $-n$ on voit facilement que R et R_1 seront situés sur une droite passant par O.

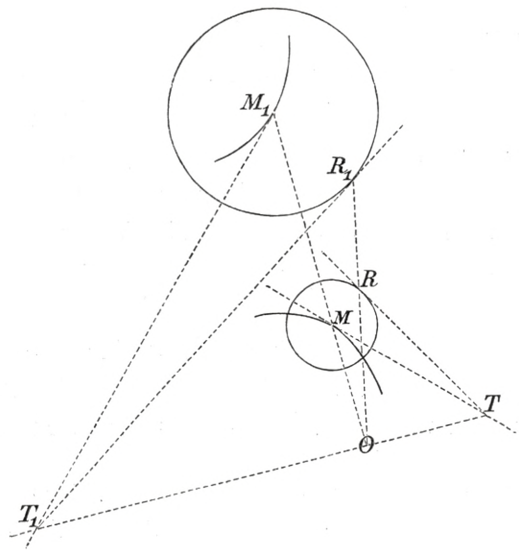

Fig. 4.

De plus on aura

$$OR \cdot OR_1 = (r-\rho)(r_1-\rho_1) = r\left(1-\frac{1}{n}\right)r_1\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= k^2\,\frac{n^2-1}{n^2}.$$

Les deux courbes décrites par R et R_1 seront donc encore inverses par rapport au pôle O, mais la puissance d'inversion aura changé.

De ce qui précède il résulte par exemple que la courbe principale des ondes, correspondant à des rayons réfractés par un cercle et issus d'un point de ce même cercle, sera la courbe inverse d'une conique en choisissant le foyer pour pôle (une conchoïde).

8. Nous allons tirer de ce que nous venons de dire une démonstration purement géométrique du théorème bien connu des trois foyers d'une courbe aplanétique. Une telle courbe se compose de deux ovales de Descartes qui sont des courbes principales des ondes, correspondant aux indices de réfraction n et $-n$, les rayons lumineux partant d'un point O et se réfractant dans un cercle déterminé. En nous servant des dénominations employées dans le § 6 nous aurons, exprimées en coordonnées bipolaires, les équations suivantes des deux ovales de Descartes:

$$nr_2 - r_1 = \frac{n^2-1}{n} b \tag{1}$$

$$nr_2 + r_1 = \frac{n^2-1}{n} b. \tag{2}$$

Or le cercle réfringent se transforme en soi-même par une inversion déterminée par O comme pôle et a^2-b^2 comme puissance (d'inversion). Il en résulte que l'ovale de Descartes représenté par (2) se transformera en celui qui correspond à (1), O étant toujours le pôle tandis que la puissance d'inversion est $(a^2-b^2)\frac{n^2-1}{n^2}$. Par cette inversion le point O_2 se transforme en un point O_3 situé sur la droite O_1O_2 de sorte que nous avons

$$OO_3 = \frac{(a^2-b^2)(n^2-1)}{n^2 a} = \frac{a^2-b^2}{a} = a_3.$$

Maintenant on sait que

$$A_1B_1 = k^2 \frac{AB}{AO \cdot OB},$$

A_1 et B_1 étant les points qui correspondent, dans une inversion de puissance k^2, aux points A et B.

Nous aurons donc, en posant $MO_3 = r_3$,

$$r_2 = \frac{(a^2-b^2)(n^2-1)r_3}{n^2 r_1 a_3} = \frac{n^2-1}{n^2}\frac{ar_3}{r_1}. \tag{3}$$

En remplaçant, dans (2), r_2 par la valeur ci-dessus et r_1 par

$$\frac{(a^2-b^2)(n^2-1)}{n^2 r_1}$$

il vient une nouvelle équation de la courbe représentée par (1):

$$(4) \qquad b r_1 - a r_3 = \frac{1}{n}(a^2 - b^2).$$

Cette équation, dont la forme est la même que celle de l'équation (1), nous montre qu'il y a une autre manière de concevoir la courbe en question comme courbe des ondes.

On obtient en outre une relation linéaire entre r_2 et r_3 en éliminant r_1 entre (1) et (4).

Il convient encore de faire observer qu'on pourra tirer une autre démonstration purement géométrique du théorème ci-dessus, en se rappelant qu'un cercle peut toujours être considéré comme le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant.

On pourra en outre concevoir un ovale de Descartes comme la projection horizontale de la courbe d'intersection entre deux cônes de révolution d'ont les axes sont verticaux. Par cette courbe gauche viennent passer, en dehors des deux cônes donnés, deux autres cônes dont l'un est un cylindre, tandis que l'autre est un cône de révolution dont l'axe est également vertical.

De cette remarque résulte une troisième démonstration géométriqne du théorème remarquable sur les ovales de Descartes.